黒沢達美

文献；

1) B. K. Ridley : Proc. Phys. Soc. 82 (1963) 954.

2) J. A. Copeland : J. appl. Phys. 37 (1966) 3602, H. D. Rees : J. Phys. C. 6 (1973) 262, D. Jones & H. D. Rees : J. Phys. C. 6 (1973) 1781.

3) T. Kurosawa, H. Maeda & H. Sugimoto : J. Phys. Soc. Japan 36 (1974) 491.

くり込み群による確率過程モデルの摂動論的考察

東大理　鈴木増雄，田中文彦

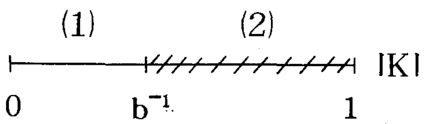
確率過程モデルに於ける臨界緩和現象は，くり込み群（RG）の操作の固定点に関してファイマングラフ展開を行うという方法[1]でHalperin達[2]により研究されたが，ここでは静的臨界現象の例にならって実際にRGの漸化式を作り動的固定点を求め臨界指数を決める最も簡単な摂動論的方法を提案する。まず次の（必ずしもマルコフ過程に限らぬ）一般の確率方程式から出発する。

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t) = D_t\,P(t),\quad D_t = D(\psi_k,\ \frac{\partial}{\partial\psi_k},\ \int_0^t ds \cdots) \tag{1}$$

$P(t) = P(\{\psi_k\}, t)$は系が$\{\psi_k\}$という配位に見出される確率分布である。(1)の解は形式的に

$$P(t) = [\exp_{\rightarrow}\int_0^t D_{t'}\,dt']\,P(o) \tag{2}$$

と書けるがRGの操作を行うために波数空間を2領域に分割する（図1）



（図１）

RG操作は次の２段階にわけて行われる：

i）第一段階　　短波長領域(2)についてTraceをとる

$$P^{(1)}(t) = T_{r(2)}\,[\exp_{\rightarrow}\int_0^t D_s\,ds]\,P(o) \tag{3}$$

ii）第二段階　　スケール変換

$$\psi_q \to \psi'_{q'} = \zeta^{-1}\psi_q \ , \qquad \zeta = b^{1+(d-\eta)/2} \tag{4}$$

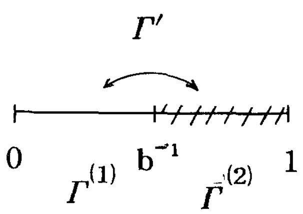
$$q \to q' = bq \quad , \qquad t \to t' = b^{-z}t$$

$$\hat{P}^{(1)}(t') = \left[\exp_{\to}\int_0^t \hat{D}_s ds \right] \hat{P}^{(1)}(0) \tag{5}$$

この変換された確率分布(5)が，zの値をうまくとることによって最初の(2)の形に戻るようにした時，このzが求める動的臨界指数になるのである。[3]　実際の問題に適用する時には第一段階を言わば〝動的摂動論〞的に遂行するのが鍵であるが，これを次のマルコフ過程によって例示しよう。

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t) = \Gamma P(t) \quad \to \quad P(t) = e^{\Gamma t}P(0),$$

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma' \ , \quad \Gamma_0 = \Gamma_0^{(1)} + \Gamma_0^{(2)} \ , \quad \Gamma' = \sum \Gamma'_{(1)}\Gamma'_{(2)} \tag{6}$$



ここで$\Gamma_0^{(j)}$，$\Gamma'_{(j)}$は領域(j)に関する演算子でΓ'は領域(1)(2)間の相互作用による時間発展の演算子である。初期条件としては

$$P(0) = f(\{\psi\} \ ; \ k \approx 0)\,Peq \tag{7}$$

を採用し，演算子$e^{\Gamma t}$をΓ'を摂動として

$$e^{\Gamma t} = [1 + \quad \Gamma'(s)ds + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \Gamma'(t_1)\Gamma'(t_2) \cdots]\, e^{\Gamma_0 t}$$

但し，　$$\Gamma'(s) \equiv e^{s\Gamma_0}\Gamma' e^{-s\Gamma_0} = \sum \Gamma'_{(1)}(s)\Gamma'_{(2)}(s) \tag{8}$$

と展開する。この手法を具体的に行うために次のFokker-Planck方程式を考える：

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int_q u_2(q)\psi_q\psi_{-q} + \int u_4(q_1 \cdots q_4)\delta(\sum_{i=1}^{4} q_i)\psi_{q_1}\cdots\psi_{q_4} + \int u_6(q_i)\delta(\sum_{i=1}^{6} q_i)\times\psi_{q_1}\cdots\psi_{q_6}$$

$$\Gamma = r\int_q \partial_q(\partial_{-q}\mathscr{H} + \partial_{-q}) \equiv \Gamma_0 + \Gamma_{int} \qquad \left(\partial_q \equiv \frac{\partial}{\partial\psi_q}\right) \tag{9}$$

$u_2(q) = q^2 + r$等と与えられ，$\mathscr{A}$はWilson[1)]の用いたハミルトニアンである。Γ_0としては形式的な(6)のΓ_0よりも，$\Gamma_0 = r\int_q [u_2(q)\, a_q\psi_q + a_q a_{-q}] = \Gamma_0^{(1)} + \Gamma_0^{(2)}$ ととる方が非線型効果を含まないので便利である。Γ_{int} は

$$\Gamma_{\mathrm{int}} = 4r\int u_4(q_i)\partial_{-q_1}\psi_{q_2}\cdots\psi_{q_4} + 6r\int u_6(qi)\partial_{-q_1}\psi_{q_2}\cdots\psi_{q_6} + \cdots \tag{10}$$

となる。RGの第一段階を行ってマルコフ近似

$$q_{(2)}^2 << t << q_{(1)}^2$$

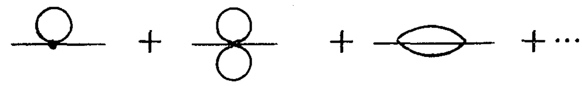
$$e^{-q_{(1)}^2 t} \approx 1 - q_{(1)}^2 t, \qquad e^{-q_{(2)}^2} \approx 0 \tag{11}$$

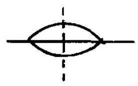
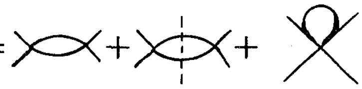
（ $q_{(j)}$は(j)領域の波数 ）

を施すと

$$P^{(1)}(t) = \exp\left\{ \int_q [1 + R_b(q)]q^2\partial_q^{(1)}\psi_q^{(1)} + \int (1 + S_b(q))\partial_q^{(1)}\partial_{-q}^{(1)} + (u_4 + T_b(q_1\cdots q_4))\,\partial_{-q_1}^{(1)}\psi_{q_2}^{(1)}\psi_{q_3}^{(1)}\psi_{q_4}^{(1)} + \cdots \right\} \overset{(1)}{P}(0) \tag{12}$$

ここで R_b, S_b, T_b はダイアグラフを用いて次のように与えられる：

$R_b(q)\,q^2 =$  $+\cdots$

$S_b(q) =$  $T_b(q_i) =$  $+\cdots$ (13)

点線は動的効果の影響により新しく出現したエネルギー分母を表わす。内線の積分は領域(2)について行う。更に第二段階のスケール変換を施すと次のようになる：

$$P^{(1)}(t) \to \hat{P}(t') = \exp\ t'\{ b^{z-2}\int_{q'} [1 + R_b(\frac{q'}{b})]\, q'^2\, \partial'_{q'}\psi'_{q'} + b^{z-2+\eta}\int_{q'} [1 + S(\frac{q'}{b})]\, \partial'_{q'}\partial'_{-q'} + b^{z-\eta+2-d}\int u_4(\frac{q_i'}{b}) + T_b(\frac{q_i'}{b})]\, \partial'_{-q_1'}\psi'_{q_2'}\psi'_{q_3'}\psi'_{q_4'} + \cdots\}\ \hat{P}(0) \tag{14}$$

最初の形と比較して u_{2m}に関する漸化式を得るがここには露わには書かない。

$u_4(q) = u^* + u_4'(q)$，　$R_b(q) = R_b^* + R_b'(q)$として固定点演算子Γ^*を求める。臨界指数 z，

ηは $b^{z-2}(1+R_b^*)$, $b^{z-2+\eta}(1+S_b^*)$が1になる様に4次元近傍で定められるが，b を十分大きくとっておくと u_6以下の項は $\varepsilon \equiv 4-d$ (d ; 次元) として $O(\varepsilon^2)$ の結果に影響を与えず便利である。[5] log bの係数を比較して $O(\varepsilon^2)$の範囲で

$$\left\{\begin{array}{l} z-2+R^*=0, \quad z-2+\eta+S^*=0 \\ (z-\eta+2-d)u^*+T^*=0 \\ \text{但し.} \quad Rb^* \equiv R^* \log b+\cdots\cdots, \quad \text{etc.} \end{array}\right. \tag{15}$$

を得る。R^*, S^*, T^*は(13)から計算され，次の結論に到達する。u^*，ηは静的な範囲で計算されたものと一致し， $z=2+c\eta$; $c=6\log(4/3)-1$。これは他の方法[2),4)]で得られた結果と一致する。

以上の結果は n-成分系，保存則のある系にも拡張は容易である。また方法論的には更に複雑な系 (例えばボーズ粒子系) にも適用できることを強調しておきたい。

文献 ;

1) K. G. Wilson, and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, (1972), 240.
   K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **28**, (1972), 548.
2) B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, and S. Ma, Phys. Rev. Lett. **29**, (1972) 1548.
   M. Suzuki, and G. Igarashi, Progr. Theor. Phys. **49**, (1973) 1070.
   M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **50**, (1973) 393, and 1767.
   G. Igarashi, preprint.
3) M. Suzuki, Progr. Theor. Phys. **51** (1974) 1257.
4) Y. Kuramoto, preprint
   H. Yahata, preprint
   H. Mori, preprint.
5) A. Aharony, Phys. Rev. **B8**, (1973), 4270.